UNIVERSITE HASSAN II DE CASABLANCA

FACULTE DES SCIENCES JURIDIQUES
ECONOMIQUES ET SOCIALES CASABLANCA
Année Universitaire 2019-2020

ALGEBRE LINEAIRE Série 2

Exercice 1

Soient les applications suivantes :

$f_1(x,y) = (x+y, e^{x+y})$

$f_2(x) = x + (0,1,0)$

$f_3(x) = (x+y , x-z, 3x+y, x , 3z)$

$f_4(x,y) = (x+y , x-y)$

Sont-elles linéaires ? Si oui, déterminer leur rang.

Exercice 2

Soit f : $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$(x , y , z) \rightarrow x - y + 2z$

1- Montrer que f est linéaire.

2- Déterminer ker(f) et puis donner une base de ker(f).

3- Déterminer Im(f).

Exercice 3

Soit g : $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$(x , y , z) \rightarrow (x - y + 2z , 2x - z)$

1- Justifier que g est linéaire.

2- Déterminer Im(g).

3- Déterminer ker(g) et puis donner une base de ker(g).

Exercice 4

Soit h : $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$(x , y , z) \rightarrow (x - y + 2z , 2x - z , 4x + 2y - 4z)$

1- Déterminer ker(h) et puis donner une base de ker(h).

2- Donner une famille génératrice de Im(h), et donner une base de Im(h).

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^5$ linéaire dont le noyau a pour base ($e_1 + e_2$, $e_1 - e_2$) où la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est notée (e_1 , e_2 , …. , e_n).

1-Quelle est la dimension de Im(f) ? Même question lorsque $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^6$ puis $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^5$
.

2-Pour ces trois applications linéaires, quelle est la dimension de Ker(f) lorsque son image a pour base ($e_1 + e_2$, $e_1 - e_2$) ?.

Exercice 6

Soit l'application $\boldsymbol{f}$ **:** $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie par :

$$\boldsymbol{f(e_1)} = (1 , -1 , 0) ; \ \boldsymbol{f(e_2)} = (-1 , 0 , 1)$$

$$\boldsymbol{f(e_3)} = (1 , -1 , 2) ; \ \boldsymbol{f(e_4)} = (0 , -2 , 3)$$

1-Rappeler brièvement pourquoi ces relations caractérisent $\boldsymbol{f}$**.**
2-Déterminer Ker($\boldsymbol{f}$). L'application $\boldsymbol{f}$ est-elle injective ?
3-Déterminer Im($\boldsymbol{f}$). L'application f est-elle surjective ? bijective ?

Exercice 7

Soit l'application linéaire $\boldsymbol{\varphi}$: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie par :

$$\boldsymbol{\varphi(e_1) = f_1 + f_2 \ ; \ \varphi(e_2) = -f_1 + f_2 \ ;}$$

$$\boldsymbol{\varphi(e_3) = f_1 + 3f_2 + 2f_3 \ ; \ \varphi(e_4) = f_1 + f_2 + f_3}$$

Où la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est notée (e_1 , e_2 , e_3 , e_4) et celle de $\mathbb{R}^3$ est notée ($\boldsymbol{f_1}$, $\boldsymbol{f_2}$, $\boldsymbol{f_3}$).
1- Déterminer une base de Im($\boldsymbol{\varphi}$). L'application $\boldsymbol{\varphi}$ est – elle surjective ?
2- Déterminer la dimension de Ker($\boldsymbol{\varphi}$). L'application $\boldsymbol{\varphi}$ est – elle injective ?
3- Déterminer de Ker($\boldsymbol{\varphi}$).

Exercice 8

Soient **B = {** $\mathbf{e_1}$ **,** $\mathbf{e_2}$ **,** $\mathbf{e_3}$ **}** la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\boldsymbol{f}$ un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$\boldsymbol{f(e_1) = e_1 \quad ; f(e_2) = f(e_3) = (e_2 + e_3)/2}$$

1- Déterminer Ker($\boldsymbol{f}$**)**, Donner une base et la dimension.
2- Déterminer de Im ($\boldsymbol{f}$**)**
3- Montrer que les sous espaces vectorielles Im ($\boldsymbol{f}$**)**et Ker($\boldsymbol{f}$**)** sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
4- Déterminer $\boldsymbol{fof}$ puis caractériser $\boldsymbol{f}$**.**

Exercice 9

Soient **B = {** $\mathbf{e_1}$ **,** $\mathbf{e_2}$ **}** la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\boldsymbol{f}$ un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$\boldsymbol{f(e_1) = e_1 \quad ; f(e_2) = 0}$$

1- Déterminer Ker($\boldsymbol{f}$**)** et Im ($\boldsymbol{f}$**).**
2- Les sous espaces vectorielles Im ($\boldsymbol{f}$**)** et Ker($\boldsymbol{f}$**)** sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 10

Soit E l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. A toute application f $\in$ E, on associe l'application A(f) définie par :

$$\boldsymbol{f} \;\rightarrow \int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{f(t)dt}$$

1- Justifier que A est une application de E à valeurs dans E.

2-Montrer que A est linéaire.

Exercice 11

Soit $\boldsymbol{f}$: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$(x , y , z) \rightarrow (x + y + z , y + z , 2y + z)$

Déterminer ker($\boldsymbol{f}$). En déduire que $\boldsymbol{f}$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

Essayez de faire ces exercices.

Je vais vous envoyé leur corrigé dans les prochains jours